# הכלל של לופיטל(l'Hospital)

יש שתי פונקציות f,g המוגדרות בסביבה ימנית(או שמאלית או מנוקבת) של ונניח ש**,** . רוצים לחשב את .

### גירסה א)

אם קיימות , אזי

כמובן,יש תוצאות דומות לחלוטין כאשר מדובר בסביבה שמאלית(אז יש נגזרות ימניות במקום שמאליות) או מנוקבת(אז יש נגזרות רגילות).

### גירסה ב)

אם קיים אזי

# דוגמה

1. ,

# דוגמה להבדל בין 2 הגירסאות

*הפונקציה f גזירה אך ורק ב:*

*לכן אי אפשר להשתמש בגירסה ב' שכן f לא גזירה בסביבה של 0. נשתמש בגירסה א':*

# דוגמה בה אפשר להשתמש בגירסה ב' אבל לא בגירסה א'

לא קיימות . עבור : . לגן לפי גירסה ב':

# הוכחה לכלל לופיטל

נגדיר , אזי f,g רציפות בa(מהימין).

אם  
*אזי*

## גירסה ב'

כאשר , :

# דוגמאות

## 1

## 2

*אי אפשר להשתמש בגירסה השנייה, לכן נשתמש בראשונה:*

*הגבול לא קיים!! אבל לפי הגירסה השנייה של כלל לופיטל:*

*לכן:*

*לכאורה הגבול קיים, אבל מתאפס אינסוף פעמים בסביבת הראשית ואז הוא לא יכול להתאפס – לכן הגבול לא קיים.*

# משפט

תהיינה f,g גזירות ב ונניח ש אזי אם קיים מתקיים ש

שים לב: קיום הגבול גורר ש עבור x גדול.

## הוכחה

נגדיר ו, .  
לפי חוק השרשרת:

אם קיים אזי :

# משפט

נניח ש.

אם קיים אזי .

## ננסה להוכיח כמו קודם

נגדיר

לא עובד ☹

## הוכחה

נסמן ונניח K סופי. אפשר להניח ש ב

יהי , אזי קיים כך שלכל מתקיים . לפי גירסת קושי למשפט הערך הממוצע, לכל קיים כך ש ולכן לכל מתקיים .

כיוון ש, קיים כך שלכל מתקיים ,

עכשיו

*מה אם , ז"א ?*

*אזי ולכן ולכן*